

© Л.А. Боронникова, Д.Б. Владимирова

Научная статья

УДК 330.4

DOI: <http://doi.org/10.15350/2409-7616.2022.4.41>**О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДОВ ФРАКТАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ
ИССЛЕДОВАНИЯ ФИНАНСОВЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ**

Л.А. Боронникова, Д.Б. Владимирова

Боронникова Любовь Андреевна,

магистрант кафедры прикладной математики,
Пермский национальный исследовательский
политехнический университет, Пермь, Россия.
boronnikova00@inbox.ru

Владимирова Дарья Борисовна,

кандидат физико-математических наук, доцент
кафедры прикладной математики, Пермский
национальный исследовательский политехнический
университет, Пермь, Россия.
da0807@mail.ru

Аннотация. В статье проводится исследование временных финансовых рядов и способов их анализа методами фрактального анализа. Показана возможность к применению теории и методов фрактального анализа в аналитике реальных данных - временных рядов, описывающих финансовые индексы нескольких ведущих стран мира. Это российский ценовой фондовый индекс ММВБ, американский S&P 500, и китайский индекс Шанхайской фондовой биржи SZSE. Показано, что во всех рядах данных имеется фрактальная составляющая, что позволяет проводить дальнейший уточняющий анализ. С целью дать оценочные характеристики мерам хаотичности и упорядоченности данных, рассчитан ряд дополнительных величин и показателей, к которым относятся корреляционная размерность, размерность фазового пространства, фрактальная размерность и показатель Херста. Также выполнена проверка всех рядов данных на наличие мультифрактальности, для этого исходные ряды дробились и анализ проводился повторно на каждой из полученных частей. Дополнительно с целью дать характеристики динамическим системам, порождающим исследуемые временные ряды, построены аттракторы всех рядов данных. Проведенные аналитический (фрактальный) и графический (аттракторный) виды анализа позволили показать, какие из исследуемых динамических систем мультифрактальны, на какие из них действуют скрытые внутренние силы. Для каждого случая рассчитано число параметров, которые необходимы для описания динамики системы. Показана конечность корреляционной размерности в каждом из случаев. Расчет корреляционной энтропии, проведенный одновременно с вычислениями показателя Херста позволил выявить, какие из рядов наиболее подходят для прогнозирования и обладают большей стабильностью.

Ключевые слова: *фрактал, фрактальная размерность, корреляционная размерность, энтропия, временной финансовый ряд, тренд, прогноз, цифровой анализ, показатель Херста, мультифрактальность, финансовый анализ, фрактальный анализ, динамические системы.*

Библиографическая ссылка: *Боронникова Л.А., Владимирова Д.Б. О применении методов фрактального анализа для исследования финансовых временных рядов // ЦИТИСЭ. 2022. № 4. С. 450-459. DOI: <http://doi.org/10.15350/2409-7616.2022.4.41>*

Research Full Article

UDC 330.4

ON THE APPLICATION OF FRACTAL ANALYSIS METHODS FOR THE STUDY OF FINANCIAL TIME SERIES

L.A. Boronnikova, D.B. Vladimirova

Lyubov A. Boronnikova,

Graduate student in the Department of Applied
Mathematics, Perm National Research Polytechnic
University, Perm, Russian Federation.
boronnikova00@inbox.ru

Daria B. Vladimirova,

Candidate of Physico-Mathematical Sciences,
Associate Professor of the Department of Applied
Mathematics Perm National Research Polytechnic
University, Perm, Russian Federation.
da0807@mail.ru

Abstract. *The article investigates time financial series and methods of their analysis by methods of fractal analysis. The possibility of applying the theory and methods of fractal analysis to the analysis of real data - time series describing financial indices of several leading countries of the world is shown. These are the Russian MICEX stock price index, the American S&P 500, and the Chinese index of the Shanghai Stock Exchange SZSE. It is shown that there is a fractal component in all data series, which allows for further clarifying analysis. In order to give estimated characteristics to measures of randomness and ordering of data, a number of additional values and indicators are calculated, which include correlation dimension, phase space dimension, fractal dimension and Hurst index. Also, all data series were checked for the presence of multifractality, for this purpose, the output series were split and the analysis was repeated on each of the obtained parts. Additionally, in order to characterize the dynamical systems generating the time series under study, attractors of all data series are constructed. The analytical (fractal) and graphical (attractor) types of analysis made it possible to show which of the studied dynamic systems are multifractal, which of them are affected by hidden internal forces. For each case, the number of parameters that are necessary to describe the dynamics of the system is calculated. The finiteness of the correlation dimension is shown in each of the cases. The calculation of the correlation entropy,*

carried out simultaneously with the calculations of the Hurst index, allowed us to identify which of the series are most suitable for forecasting and have greater stability.

Keywords: *fractal, fractal dimension, correlation dimension, entropy, financial time series, trend, forecast, digital analysis, Hurst index, multifractality, financial analysis, fractal analysis, dynamic systems.*

For citation: *Boronnikova L.A., Vladimirova D.B. On the application of fractal analysis methods for the study of financial time series. CITISE, 2022, no. 4, pp. 450-459. DOI: <http://doi.org/10.15350/2409-7616.2022.4.41>*

Введение

Актуальность. Национальные фондовые индексы являются незаменимыми индикаторами текущего состояния фондовых рынков, поскольку содержат в себе информацию о состоянии ценных бумаг крупнейших компаний тех отраслей, которые являются наиболее развитыми и доходными для данной страны. В современном мире, когда на изменение цены активов нужно реагировать мгновенно, важно понимать, что глубокий анализ текущей ситуации и тем более прогнозирование финансовых временных рядов невозможно без привлечения математических методов. К наиболее современным методам анализа финансовых временных рядов относят так называемые методы цифрового анализа. К этой категории методов относят методы спектрального анализа, включающие в себя вейвлет-анализ, и фрактальный анализ данных.

Изученность проблемы. Традиционно в основе исследования финансовых рядов данных лежат технический и фундаментальный анализы, подробное описание которых на современном этапе представлено в работах Д. Швагера и Р. Хэгстрема. Однако этот вид аналитики не учитывает движение цены вследствие потока новых событий, поскольку опирается исключительно на ретроспективные данные. Теория эффективного рынка, разработанная во второй половине прошлого века, постулирует мгновенную и полномерную реакцию активов на все экономические изменения. Однако, как показано в исследованиях Патрика Бойла и Джесси МакДугал, в реальности рынки не обладают настолько сильной формой эффективности. Фрактальный анализ, впервые примененный к экономическим процессам Б. Мандельбротом и Р. Хадсоном, показал, что его можно применять к любым временным интервалам и любым рынкам. В исследовании Э. Петерса было выявлено, что, анализируя чередование участков с различной фрактальной размерностью, можно предсказать поведение системы и диагностировать ее нестабильные состояния. Изучение фрактальной геометрии применительно к рынку, предложенное Б. Мандельбротом, позволило рассматривать его как сложную систему, которая имеет возможность изменяться под влиянием различных внешних факторов. Данные процессы отличаются от других тем, что их устойчивость может носить долговременный характер [1-5].

Целесообразность разработки темы. В настоящее время существует высокий спрос на прогнозирование финансовых рядов. Используя методы фрактального анализа можно удовлетворить данную потребность и улучшить предикторы, получаемые классическими эконометрическими методами.

Научная новизна. Большинство работ по данной теме зачастую ограничиваются лишь получением числового результата, без его интерпретации к анализу самих динамических систем, лежащих в основе рядов данных. В данной же работе впервые предпринята попытка связать результаты расчётов ключевых показателей фрактального анализа с тем, какие фактически возможности раскрываются для анализируемых

финансовых рядов в аспектах прогнозирования, стабильности и корреляции с разными экономическими сценариями.

Основной **целью** исследования является фрактальный анализ финансовых рядов данных для выявления их стабильности, возможности прогнозирования с учетом скрытых тенденций поведения динамических систем.

Для достижения цели необходимо решить ряд **задач**:

- построение аттракторов динамических систем;
- расчет основных фрактальных характеристик - фрактальной размерности, показателя Херста, корреляционных размерности и энтропии, размерности фазового пространства;
- проверка мультифрактальности рядов данных;
- анализ полученных результатов.

Теоретическая значимость исследования раскрывается в методологическом обосновании применения методов фрактального анализа для прогнозирования финансовых временных рядов. **Практическая значимость** определяется быстротой и доступностью расчетов, а значит возможностью использования полученных результатов в инвестиционной деятельности компаний и физических лиц.

Основная часть

В качестве объектов исследования рассмотрены основные фондовые индексы ведущих стран: российский индекс ММБВ (Московская межбанковская валютная биржа), американский S&P 500 (составляется и принадлежит компании Standard&Poor's) и китайский SZSE (ShenzhenStockExchange Шэньчжэньская фондовая биржа).

Данные индексы имеют большую историю, что важно для изучения общей картины, а также измерялись часто, благодаря чему можно рассмотреть мультифрактальность. Данные рассматриваются в период за последние три года с 2019 по 2022 год (рис.1).

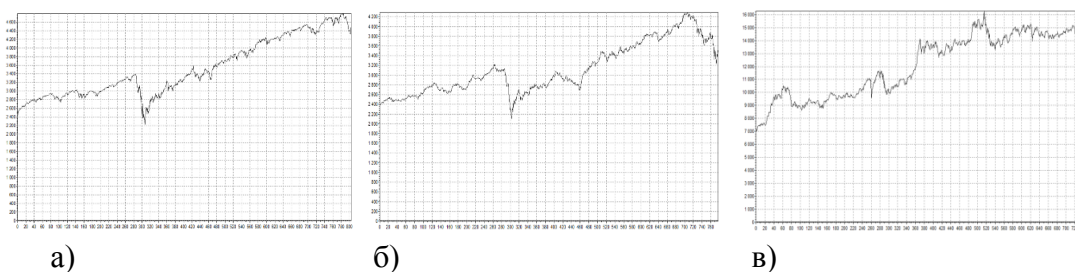


Рисунок 1 - Динамика фондовых индексов:
а) S&P 500; б) ММБВ; в) SZSE.

Методология. Важную роль в создании подхода к анализу нелинейных динамических систем имеет теория подобия. Теория подобия предлагает термин аттрактора, который необходим для выявления детерминированности систем. В некоторых случаях аттракторы соответствуют неподвижным точкам или предельным циклам, а в некоторых являются хаотическими. При значениях фрактальной размерности D , меньших 1,5, на систему влияет одна или несколько сил, толкающие систему в одном направлении. Для значений, равных 1,5, силы, действующие на системы, разнонаправлены и компенсируют друг друга. Если значение D более 1,5, система крайне неустойчива, и готова перейти в другое состояние (флаг грядущей катастрофы) [6]. При значениях показателя Херста $H=0,5$ события являются случайными, для $H<0,5$ поведение ряда хаотическое, что означает ненадежность предиктора, если $H>0,5$, события являются неслучайными и между элементами ряда присутствует корреляция [7]. Следующий шаг исследования - проверка выбранных данных на наличие мультифрактальности. Мультифрактальность показывает, что каждая часть ряда является фракталом [8]. Важными показателями для системы являются ее корреляционная

размерность и энтропия. При росте размерности вложения и наличии случайной компоненты следует ожидать роста корреляционной размерности ряда. Чем ниже корреляционная размерность ряда, тем меньшее число факторов берётся для описания системы. Когда корреляционная размерность достигает насыщения, получаем размерность фазового пространства. Значение этой размерности характеризует оценку минимальной размерности вложения, иными словами количество динамических переменных, влияющих на систему. Конечная положительная энтропия указывает нам на класс системы. Если энтропия возрастает с ростом размерности погружения, можно сделать вывод, что процесс является стохастическим. С увеличением энтропии уменьшается предсказуемость переменной [9-10].

Результаты. Построим и проанализируем аттракторы выбранных систем (рис.2). Все вычисления производятся в программном пакете Fractan.

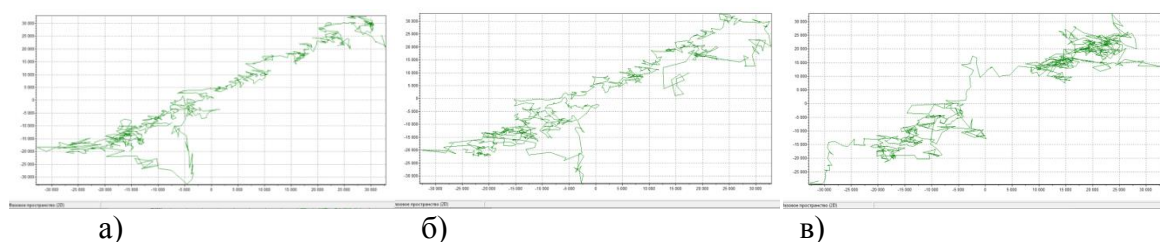


Рисунок 2 - 2D-аттракторы динамических систем фондовых индексов:
а) S&P 500; б) ММББ; в) SZSE.

Для индекса S&P 500 фазовый поток является более детерминированным, однако во всех случаях фазовые траектории можно легко различить. Результаты расчета фрактальной размерности D и показателя Херста исследуемых временных рядов представлены на рис.3.

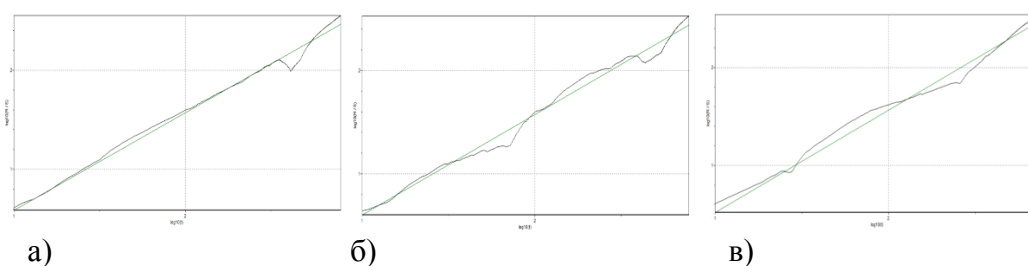


Рисунок 3 - фрактальная размерность и показатель Херста:
а) S&P 500 б) ММББ в) SZSE

Фрактальная размерность S&P 500 равна 1.014, для ММББ - 1.032, у китайского индекса - 0.955. Показатель Херста у американского индекса 0.986, у индекса московской биржи 0.968, у SZSE 1.045.

Если $0,5 < H < 1,0$, то временной ряд – персистентный, то есть происходящие сегодня события воздействуют на будущее. При $0 < H < 0,5$ имеем антиперсистентность, означающую большую вероятность изменения тенденции [11-12].

Из того, что каждая часть ряда, как и ряд целиком, является фракталом, следует, что весь ряд данных мультифрактален [13]. Для подтверждения факта мультифрактальности каждая часть ряда должна иметь фрактальную размерность, большую 1. Далее в таблицах 1-3 приводятся результаты по проверке мультифрактальности.

Таблица 1

Фрактальная размерность S&P 500

Промежуток времени	Значение фрактальной размерности
02.01.2019- 29.01.2021	1.124
02.01.2019- 31.08.2021	1.053
24.05.2019- 31.05.2021	1.051
06.08.2019- 23.07.2021	0.994
02.03.2020- 31.01.2022	0.984

Таблица 2

Фрактальная размерность ММВБ

Промежуток времени	Значение фрактальной размерности
03.01.2019- 15.01.2021	1.066
03.01.2019- 09.09.2021	1.066
28.05.2019- 02.07.2021	1.089
07.08.2019- 31.08.2021	1.090
16.10.2019- 29.10.2021	1.001

Таблица 3

Фрактальная размерность SZSE

Промежуток времени	Значение фрактальной размерности
02.01.2019- 08.02.2021	1.051
03.01.2019- 30.09.2021	0.979
06.05.2019- 01.09.2021	0.885
01.08.2019- 25.10.2021	0.941
16.10.2019- 29.10.2021	0.915

Находя фрактальную размерность на различных промежутках, можно сделать вывод, что индекс ММВБ обладает мультифрактальностью, а S&P 500 и SZSE нет.

Нахождение корреляционной размерности и размерности фазового пространства на анализируемых данных представлено на рис.4.

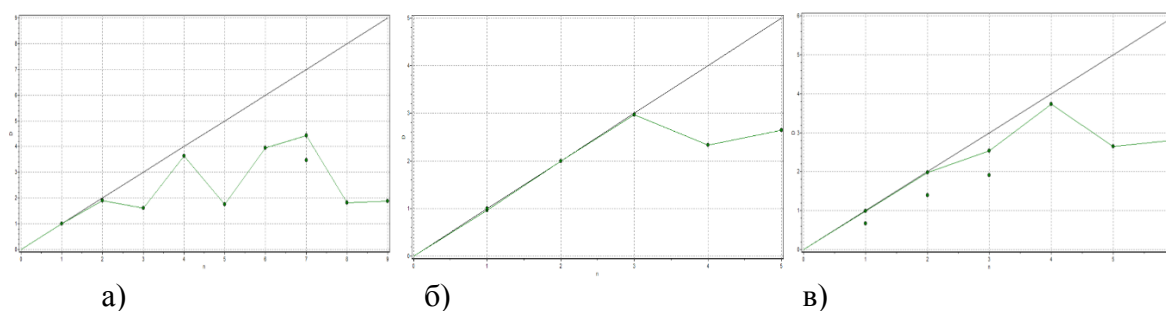


Рисунок 4 - корреляционная размерность и размерность фазового пространства:

а) S&P 500 б) ММББ в) SZSE

Корреляционная размерность и размерность фазового пространства S&P 500 соответственно равны 4.420 и 7, для ММББ 2.965 и 3, и для SZSE 3.731 и 4.

На рис.5 приведены данные расчёта корреляционной энтропии анализируемых финансовых рядов.

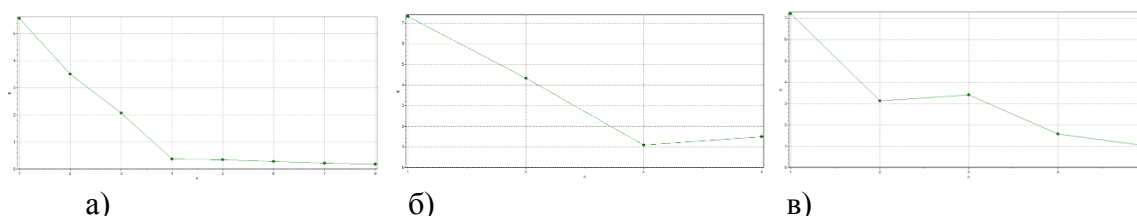


Рисунок 5 - корреляционная энтропия:
а) S&P 500 б) ММББ в) SZSE

Подведем итоги. Таблица 4 содержит сводную информацию проведенного анализа исследуемых финансовых временных рядов.

Таблица 4

Результаты анализа данных

	H	D	Корреляционная размерность / Размерность фазового пространства	Энтропия	Мультифрактальность
S&P 500	0.986	1.014	4,420/ 7	0.182	нет
ММББ	0.968	1.032	2.965/ 3	1.093	есть
SZSE	0.953	1.047	3.731/ 4	1.013	нет

S&P 500 имеет наибольшее значение показателя Херста, это означает наибольшую стабильность и предсказуемость. Во всех случаях фрактальная размерность близка к 1, что означает влияние на показатели одной или несколько сил, направленных в одну сторону. Наибольшая корреляционная размерность у индекса S&P 500, что означает большее число параметров, используемых для описания динамики системы. Рост размерности фазового пространства при этом очевиден и свидетельствует о наличии дополнительного движущего регулятора. Для индексов ММББ и SZSE значения корреляционной размерности и размерности фазового пространства близки, что говорит о возможности предположить, что они являются наиболее случайными. Корреляционная энтропия конечна и положительна для всех случаев, однако наименьшее ее значение – опять у американского индекса, что снова подтверждает его наибольшую предсказуемость. Российский Индекс мультифрактален - это знак того, что фрактальный анализ можно проводить на любых разбиениях и погружениях [14-15].

Заключение

В данной работе были проанализированы различные методы прогнозирования финансовых рядов. Методы фрактального анализа применены к объектам исследования, найдены показатель Херста, фрактальная и корреляционная размерности и энтропия, построены аттракторы. Проведен анализ полученных результатов. Также показана сходимость корреляционной размерности для всех исследуемых временных рядов, найден вид соответствующих кривых сходимости.

Можно сказать, что фрактальный анализ дает возможность провести оценку поведения финансовых временных рядов и ответить на вопросы, связанные с его поведением во времени.

Список источников:

1. Швагер Д. Технический анализ: Полный курс. - 13-е изд. - М.: Альпина Паблишер, 2017. - 880 с.
2. Сопин К.Ю., Диченко С.А., Самойленко Д.В. Криптографический контроль целостности данных на основе геометрических фракталов // Проблемы информационной безопасности. компьютерные системы. 2022. №1. С. 85-95 DOI: [10.48612/jisp/ktu1-1632-n54t](https://doi.org/10.48612/jisp/ktu1-1632-n54t)
3. Boyle P., McDougall J. Trading and Pricing Financial Derivatives: A Guide to Futures, Options, and Swaps. - Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2018. - 268 p. DOI: <https://doi.org/10.1515/9781547401161>
4. Анарова Ш.А., Иброхимова З.Э., Саидкулов Э.А. Метод r -функций и построение уравнений фракталов // Проблемы вычислительной и прикладной математики. 2021. №4 (34). С. 36-49 URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=47221695>
5. Tarasova V.V., Tarasov V.E. Concept of Dynamic memory in Economics. // Communications in nonlinear science and numerical simulation. 2017. Vol. 55. P. 127-145. DOI: [10.1016/j.cnsns.2017.06.032](https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2017.06.032)
6. Куликов В.Л., Олехова Е.Ф., Оселедец В.И. О размерности фракталов Макмуллена-Бедфорда // Современная математика и концепции инновационного математического образования. 2019. №1. С. 55-63. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=39241201>
7. Mosteanu R., Faccia A. Torrebruno Fedele Torrebruno The newest intelligent financial decisions tool: fractals. A smart approach to assess the risk // American University in the Emirates Dubai, United Arab Emirates. 2019. No. 2. P. 89-97
8. Sam N., Vashishth V. Analysis of fractal patterns in the prices of agro-based commodities // Department of Mathematics, Jesus and Mary College, University of Delhi, New Delhi. 2021.
9. Пугачёв Д.В., Тарасов А.А. Фракталы. Компьютерное моделирование фракталов // Актуальные научные исследования в современном мире. 2021. №12-3 (80). С. 109-117. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=47686290>
10. Шутов А.В. Фракталы Розы и их теоретико-числовые приложения // Актуальные проблемы прикладной математики / Материалы IV Международной научной конференции. - Нальчик: Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук, 2018. 287 с. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=36308550>
11. Ребрикова И.С. Элективный курс "фракталы". Вводный урок // Молодой ученый. 2020. №46 (336). С. 438-440 URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=44247610>
12. Тимофеев А.Г., Лебединская О.Г. Решение задачи настройки и реакции фракталов с использованием минимального набора параметров // Славянский форум. 2019. №2 (24). С. 72-77. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=38166233>
13. Агульчанский М.А. Принцип работы комплексного фрактала многофункционального диагностирования сложной динамической системы // Передача,

приём, обработка и отображение информации о быстропротекающих процессах. - М.: Военно-воздушная инженерная академия им. Н.Е. Жуковского, 2019. - С. 38-40 URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=42573857&pf=1>

14. Matviychuk, A., Novoseletskyu, O., Vashchaiev, S. Fractal analysis of the economic sustainability of enterprise // SHS Web of Conferences. 2019. №65. DOI: <https://doi.org/10.1051/shsconf/20196506005>

15. Нефедовский В.А., Савицкий Ю.А., Кожухова О.Б. Фракталы и их применение // Научные чтения имени профессора Н.Е. Жуковского. - Краснодар: Юг, 2020. С. 130-134 URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=42700088>

References:

1. Schwager D. *Technical analysis*. Moscow, Alpina Publ., 2017. 880 p. (In Russian).
2. Sopin K.Yu., Dichenko S.A., Samoilenko D.V. Cryptographic control of data integrity based on geometric fractals. *Problems of information security. Computer systems*, 2022. no.1, pp. 85-95. (In Russian). DOI: [10.48612/jisp/ktu1-1632-n54t](https://doi.org/10.48612/jisp/ktu1-1632-n54t)
3. Boyle P., McDougall J. *Trading and Pricing Financial Derivatives: A Guide to Futures, Options, and Swaps*. Walterde Gruyter Gmb H & Co KG, 2018. 268 p. DOI: <https://doi.org/10.1515/9781547401161>
4. Anarova Sh.A., Ibrokhimova Z.E., Saidkulov E.A. Method of r-functions and construction of fractal equations. *Problems of Computational and Applied Mathematics*, 2021, no.4 (34), pp. 36-49. (In Russian). URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=47221695>
5. Tarasova V.V., Tarasov V.E. Concept of Dynamic memory in Economics. *Communications in nonlinear science and numerical simulation*, 2017, vol. 55, pp. 127-145. DOI: [10.1016/j.cnsns.2017.06.032](https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2017.06.032)
6. Kulikov V.L., Olekhova E.F., Oseledets V.I. On the dimension of McMullen-Bedford fractals. *Modern Mathematics and Concepts of Innovative Mathematical Education*, 2019, no. 1, pp. 55-63. (In Russian). URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=39241201>
7. Mosteanu R., Faccia A. Torrebruno Fedele Torrebruno The newest intelligent financial decisions tool: fractals. A smart approach to assess the risk. *American University in the Emirates Dubai, United Arab Emirates*, 2019, no.2, pp. 89-97
8. Sam N., Vashishth V. *Analysis of fractal patterns in the prices of agro-based commodities*. Department of Mathematics, Jesus and Mary College, University of Delhi, New Delhi, 2021.
9. Pugachev D.V., Tarasov A.A. Fractals. Computer modeling of fractals. *Actual scientific research in the modern world*, 2021, no.12-3 (80), pp. 109-117. (In Russian). URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=47686290>
10. Shutov A.V. *Rauzy fractals and their number-theoretic applications*. Nalchik, Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences Publ., 2018. 287 p. (In Russian). URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=36308550>
11. Rebrikova I.S. Elective course "fractals". Introductory lesson. *Young scientist*, 2020, no.46 (336), pp. 438-440. (In Russian). URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=44247610>
12. Timofeev A.G., Lebedinskaya O.G. Solving the problem of setting and reacting fractals using a minimum set of parameters. *Slavic Forum*, 2019, no. 2 (24), pp. 72-77. (In Russian). URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=38166233>
13. Agulchansky M.A. *The principle of operation of a complex fractal for multifunctional diagnostics of a complex dynamic system*. Moscow, Air Force Engineering Academy named after N.E. Zhukovsky Publ., 2019. pp. 38-40. (In Russian). URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=42573857&pf=1>

14. Matviychuk, A., Novoseletskyy, O., Vashchaiev, S. Fractal analysis of the economic sustainability of enterprise. *SHS Web of Conferences*, 2019. no. 65. DOI: <https://doi.org/10.1051/shsconf/20196506005>

15. Nefedovsky V.A., Savitsky Yu.A., Kozhukhova O.B. Fractals and their application. Krasnodar, South Publ., 2020. pp. 130-134. (In Russian).URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=42700088>

Submitted: 11 November 2022

Accepted: 11 December 2022

Published: 12 December 2022

